COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 5 giugno 2012

PROF. SUSANNA TERRACINI

Giustificare accuratamente le risposte.

(1) (a) Si definisca la nozione di famiglia sommabile di numeri reali e si discutano le proprietà principali connesse.

(b) Si consideri l'insieme dei numeri interi che contengono solamente i fattori primi 2, 3, 5:

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathbf{N} \,:\, \alpha = 2^i 3^j 5^k \,, (i, j, k) \in \mathbf{N}^3\}$$

e si stabilisca la sommabilità (ed eventualmente la somma) della famiglia

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \alpha \in \mathcal{A}.$$

(c) Generalizzare al caso di un numero arbitrario finito di fattori primi. Dedurne che i numeri primi sono infiniti.

(2) (a) Si definisca l'insieme ternario di Cantor C, se ne dimostri la misurabilità e se ne calcoli la misura. Si dimostri la non numerabilità di C.

(b) Si scriva la definizione di funzione reale semplice e misurabile.

(c) Si verifichi che la funzione di Cantor-Vitali $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ è misurabile. Si calcoli infine il suo integrale.

(3) Sia (X, Σ_X, μ) uno spazio misurabile (X insieme, Σ_X σ-algebra di sottoinsiemi di X e $\mu : \Sigma_X \to [0, +\infty]$ misura) e sia $A \subseteq X$ un insieme tale che $\mu(A) < +\infty$. Dopo aver enunciato il Teorema di Egorov per una successione definita sull'insieme A, enunciare e dimostrare il Teorema di convergenza dominata in A.

(4) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin(x|y|)}{1 + x^3} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}\,,$$

si definisca

$$F(y) = \int_0^\infty f(x, y)\, dx\,.$$

(a) Dopo aver dimostrato che la funzione F è definita su tutto $\mathbb{R}$, studiare la continuità di F in $\mathbb{R}$.

(b) Studiare la derivabilità di F in $\mathbb{R}$ classificando gli eventuali punti di non derivabilità.